XIX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

практический тур, решения

2012

11 марта

---

9 класс

Представьте себе, что Вы живете во времена Средневековья на небольшом острове с высокой горой (ее высота известна), у которого отсутствуют какие-либо связи с другими островами и материком. Местный правитель, которому кто-то рассказал, что Земля круглая, пожелал узнать ее радиус и повелел Вам выяснить это. В Вашем распоряжении имеются обычные средневековые угломерные инструменты (без оптики).

Ваша задача:

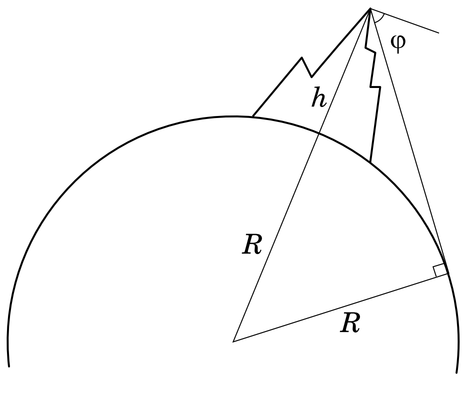
A) разработать и описать метод определения радиуса Земли;

B) оценить точность результата, который мог быть получен этим методом.

Решение:

Поскольку, по условию задачи, остров покидать нельзя и использовать сведения, полученные из-за его пределов, тоже, то необходимо пронаблюдать какой-либо эффект, связанный с шарообразностью Земли и доступный для обнаружения при наблюдении с разных высот (на острове есть гора).

Таким эффектом может быть понижение горизонта при подъеме наблюдателя. Предположим, что наблюдатель оказался на вершине горы. Определить вертикальное направление он может с помощью обычного отвеса, поэтому можно определить и направление, перпендикулярное вертикальному (его хочется назвать «горизонтальным», но на вершине горы оно не будет совпадать с направлением на горизонт), а затем определить угол φ между полученным направлением и направлением на горизонт.



Из рисунка видно, что

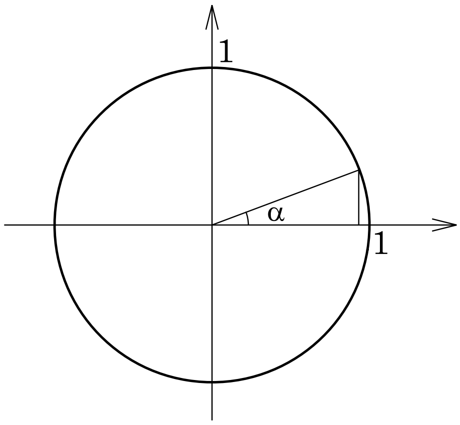
$$\sin(90^\circ - \varphi) = \frac{R}{R+h},$$

где R — искомый радиус Земли, h — известная нам высота горы. Преобразуем это выражение

$$\cos\varphi = \frac{R}{R+h} = \frac{R+h-h}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h}.$$

Понятно, что из получившегося выражения легко выразить R, тем самым первую часть задачи можно считать решенной.

Однако для оценки точности метода подобное выражение неудобно. Поскольку угол φ, очевидно, является очень малым, можно попытаться найти приближенное значение его косинуса.



Вспомним определение синуса угла. Если мы будем рассматривать некоторый малый угол (см.рисунок), то очевидно, что длина противолежащего катета практически совпадает с длиной дуги, стягиваемой углом, а она для единичной окружности по определению равна величине угла в радианах. Таким образом, получаем важный вывод — если угол α мал, то, если он выражен в радианах, верно утверждение $\sin\alpha =\approx \alpha$.

Затем вспомним, что для любого угла верно утверждение

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

поэтому для малого угла

$$\cos^2\alpha \approx 1 - \alpha^2.$$

С другой стороны, для любого угла

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

поэтому

$$\cos 2\alpha \approx 1 - 2\alpha^2$$

А теперь сделаем замену, обозначив $2\alpha = \varphi$. Поскольку измеренный угол мал, то его половина, очевидно, еще меньше, и все наши рассуждения вполне применимы. Тогда получаем, что

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Приравняем это приближенное выражение к полученному ранее значению для косинуса, и заодно учтем, что $h \ll R$. Тогда

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} \approx 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R}.$$

Отсюда

$$\varphi^2 = \frac{2h}{R}$$

и окончательно

$$R = \frac{2h}{\varphi^2}.$$

Что могло бы получиться при реальных измерениях? Мы знаем, что высота самых высоких гор на Земле — около 8 км, но маловероятно, что такая гора окажется на острове. Поэтому возьмем в качестве оценки высоты горы $h = 4$ км. Радиус Земли (как мы сейчас знаем), равен $R \approx 6400$ км, поэтому при идеально точных измерениях мы получили бы

$$\varphi = \sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{\frac{8}{6400}} = \sqrt{\frac{1}{800}} \approx \frac{1}{30} \text{ радиана.}$$

В одном радиане немного менее $60°$, так что понижение горизонта окажется весьма заметным — около $2°$, и подобный метод, очевидно, должен давать близкий к действительности результат. Чтобы оценить его погрешность, попробуем добавить к измеренному углу некоторую погрешность $\Delta\varphi$ и посмотрим, какой будет соответствующая погрешность определения радиуса ΔR. Запишем

$$R + \Delta R = \frac{2h}{(\varphi + \Delta\varphi)^2}$$

и разделим это уравнение на аналогичное, но без погрешностей. Получим

$$1 + \frac{\Delta R}{R} = \frac{\varphi^2}{(\varphi + \Delta\varphi)^2}$$

Преобразуем правую часть, учитывая, что $\Delta\varphi \ll \varphi$:

$$\frac{\varphi^2}{(\varphi + \Delta\varphi)^2} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 2\varphi \cdot \Delta\varphi + (\Delta\varphi)^2} = \frac{1}{1 + 2\Delta\varphi/\varphi + (\Delta\varphi/\varphi)^2} \approx \frac{1}{1 + 2\Delta\varphi/\varphi}.$$

Характерная погрешность угломерных измерений во времена Средневековья не могла быть лучше $1' \div 2'$ — предельного углового разрешения человеческого глаза. Кроме этого, существует рефракция, приподнимающая не только объекты над горизонтом, но и положение самого горизонта, но о ее существовании в те времена уже знали и умели учитывать соответствующие поправки. Так что в качестве оценки точности угломерных измерений можно взять ;$(1/25)°$ (это несколько больше $2'$). Тогда, с учетом того, что сама измеряемая величина угла около $2°$, можно считать, что $\Delta\varphi/\varphi \approx 1/50$. Тогда

$$1 + \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{1 + 0.04} \approx 0.96,$$

поэтому $\Delta R/R = -0.04$. В отрицательном значении нет ничего страшного — если означает лишь то, что если мы при измерении завышаем угол, то значение радиуса

Земли при этом занижается. Легко убедиться, что смена знака $\Delta\varphi$ приведет к аналогичной смене знака ΔR.

Таким образом, итоговая относительная погрешность результата составляет около 4%, что соответствует ошибке примерно ± 250 км. Разработавший этот метод в начале XI века Абу Рейхан Мухаммед Ибн Ахмед Аль-Бируни смог определить радиус Земли даже с большей точностью, но при этом он усреднял результаты многих измерений.